№14-дәріс.

Тақырыбы: Фурье қатары.

Мысал 1. Периодты $T = 2\pi$ болатын

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x \le 0 \\ x, 0 < x < \pi \\ \frac{\pi}{2}, x = \pi \end{cases}$$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі: $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos nxdx = \begin{vmatrix} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos nxdx \\ v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\left[x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nxdx\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot(\frac{1}{n^2}cosnx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot(\frac{1}{n^2}(\cos\pi n - \cos 0)) = \frac{\cos\pi n - 1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin nxdx \\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\left[-x\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nxdx}_{0}\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos\pi n\right) = -\frac{\cos\pi n}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n};$$

Сонымен,

$$f(x)=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\pi n-1}{\pi n^{2}}\cos nx-\frac{\cos\pi n}{n}\sin nx\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left[\left(-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)+\left(-\frac{\sin 2x}{2}\right)+\left(-\frac{2\cos 3x}{3^{2}\pi}+\frac{\sin 3x}{3}\right)+\ldots\right]=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^{2}}+\frac{cos 5x}{5^{2}}\right)+\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\right)$$

Жұп және тақ функциялардың Фурье қатары

Жіктеуге жататын $f(x)$ функциясын периодты $T = 2\pi$ деп ұйғарамыз.

1. $f(x)$ функциясы жұп, яғни $f(-x) = f(x)$ деп ұйғарайық.
Онда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad (n = 0,1,\dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad (n = 1,2,\dots)$$

Ал $f(x)$ функциясы жұп болғандықтан $f(x)\cos nx$ көбетіндісі де жұп функция болады.

Ендеше $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx$

Олай болса

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

Ал $f(x)\sin nx$ көбейтіндісі тақ болады.

Онда $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0; \Rightarrow b_n = 0$

Сонымен, $f(x)$ функциясы жұп болса, Фурье қатары:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

1. $f(x) = \frac{x^2}{4}$ функциясы тақ болсын, яғни $f(-x) = -f(x)$, онда $a_n = 0$ болады да, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$, онда тақ функцияның Фурье қатары тек синусы бар қатар ғана болады.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx dx$$

Мысал 6.

Периодты $T=2\pi$ болатын $f(x)=|x|$ функциясын

$$=\frac{-1}{\pi n}(\pi\cos\pi n)=-\frac{\cos\pi n}{n}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$; кесіндісінде Фурье қатарына жікте:

Шешуі: $f(x)=|x|$ - жұп функция, олай болса $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{\pi}=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\left|\begin{array}{l}u=x\\ du=dx\\ dv=\cos n\,dx\\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{array}\right|=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}($$

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos\pi n-1)}{\pi n^2}\cos nx=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{2\cdot(-2)}{1^2\cdot\pi}\cos x+0+\frac{2\cdot(-2)}{3^2\cdot\pi}\cos 3x+0+\frac{2\cdot(-2)}{5^2\pi}\text{co}\right.$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\ldots\right)$$

Кез – келген периодты функцияның Фурье қатары

Мысал 10.

Периодты $T=2$ болатын $f(x)=x$ функциясын $(-1;1)$ аралығында Фурье қатарына жіктеу керек болсын.

Шешуі: $f(x)=x$ - тақ функция, $l=1$. Ендеше, $a_n=0$; ал

$$b_n=2\int_0^1 x\sin\pi nx dx=\left|\begin{array}{l} u=x \\ du=dx \\ dv=\sin\pi nxdx \\ v=-\dfrac{1}{\pi n}\cos\pi nx \end{array}\right|=2\left(-\frac{x}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_0^1+\int_0^1\frac{1}{\pi n}\cos\pi ndx\right)=$$

$$=2\left(-\frac{1}{\pi n}\cos\pi n+0\right)+\frac{1}{\pi^2n^2}\sin\pi nx\Big|_0^1=\frac{-2}{\pi n}\cos\pi n=(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi n};$$

Олай болса, берілген функцияның Фурье қатары:

$$x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\pi nx}{n}=\frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x-\frac{\sin 2\pi x}{2}+\frac{\sin 3\pi x}{3}-\dots\right).$$

Мысал 11.

$f(x)=1-|x|$ функциясын $(-1;1)$ аралығында Фурье қатарына жіктеу керек болсын.

Шешуі: $f(x)=1-|x|$ - жұп функция. Олай болса, $b_n=0;$ ал $l=1$ және:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1(1-|x|)\,dx=2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=1$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=2\int_0^1(1-x)\cos\pi nx dx=\begin{vmatrix} u=1-x \\ du=-dx \\ dv=\cos\pi nxdx \\ v=\dfrac{1}{\pi n}\sin\pi nx \end{vmatrix}=$$

$$=2\left(\frac{1-x}{\pi n}\sin\pi nx\Bigg|_0^1+\int_0^1\frac{1}{\pi n}\sin\pi nxdx\right)=2\left(\frac{1-1}{\pi n}\sin\pi n-\frac{1-0}{\pi n}\sin 0-\frac{1}{\pi^2n^2}\cos\pi nx\Bigg|_0^1\right)=$$

$$=2\left(-\frac{1}{\pi^2n^2}\cos\pi n+\frac{1}{\pi^2n^2}\right)=\frac{2}{\pi^2n^2}(1-\cos\pi n)=\frac{2}{\pi^2n^2}\left(1-(-1)^n\right).$$

Ендеше, берілген функцияның Фурье қатары :

$$1-|x|=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left[1-(-1)^n\right]}{\pi^2n^2}\cos\pi nx=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}+\ldots\right).$$